

Solution Exam Math 4 (1)

Ex 1: $z^2 = 1 \Rightarrow z = +1 \text{ or } -1 \Rightarrow -1 + 1 = 0$ (15pts)

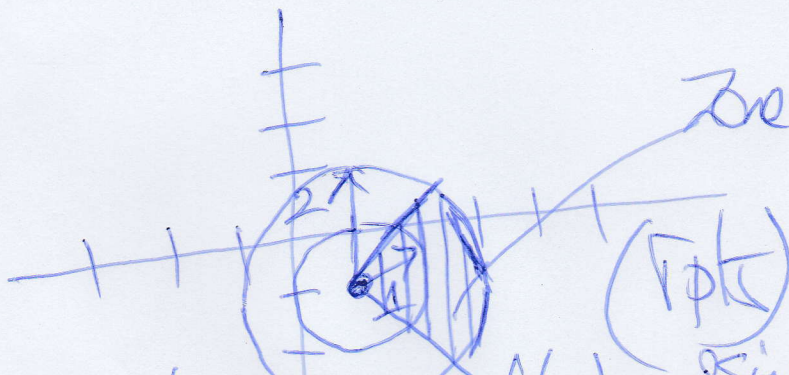
$z^3 = 1 \Rightarrow z = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$1 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ (15pts)

$z^n = 1 \Rightarrow z_k = \exp\left(i\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) \quad k = 1, \dots, n$

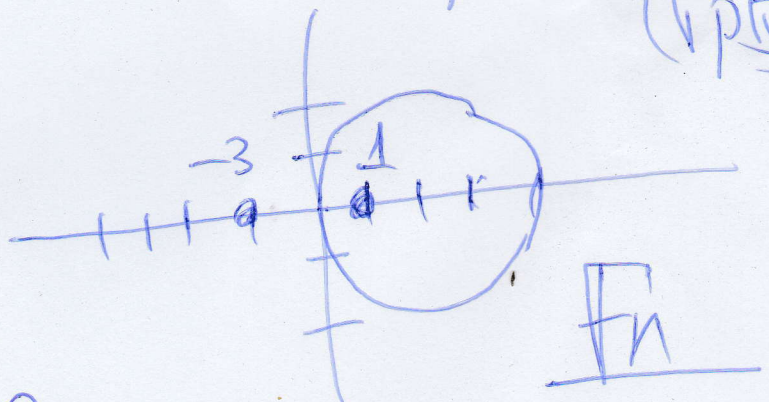
$\sum_{k=1}^n \exp\left(i\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} z_k = 0$ (7pts)

Ex 2:



Ex 3: $f = 2\cos x \sin y - y \Rightarrow f(z) = 2\sin z - z + i\lambda$
 (7pts) $\lambda = 0$ or $f'(z) = 0$

Ex 4: $\oint_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z+3} dz = 2\pi i \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z+3} \Big|_{z=1} = \frac{\pi}{2}$ (7pts)



Corrigé type de l'examen final

2ème année Licence Génie Civil

Matière : Mécanique des sols

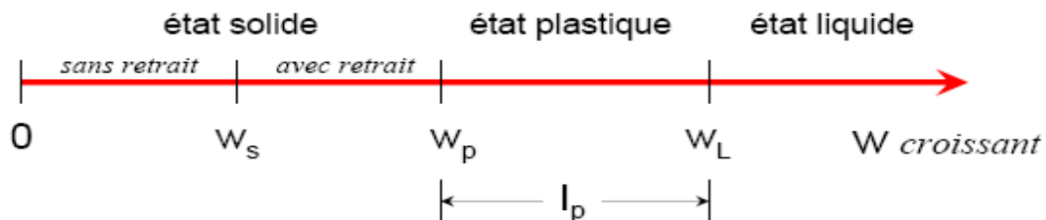
Réponses aux questions de cours : (08 Pts)

1) Le compactage est l'ensemble des procédés mécaniques (charge, vibration, chocs), qui mènent à la diminution du volume et l'amélioration de la densité d'un sol. (01 points)

Son utilité réside dans le fait de l'augmentation de la compacité du sol, améliore sa capacité portante et limite les déformations et tassements. (01 points)

2) C'est une courbe en forme de cloche, dont le poids volumique sec augmente avec la teneur en eau jusqu'à une valeur maximale. Au-delà de cette valeur, l'accroissement de la teneur en eau réduit le poids volumique sec du sol. (1 points)

3) On distingue quatre états de consistance des sols, schématisée comme suit ; (01 points)



4) Casagrande proposa un diagramme de plasticité permettant d'identifier les sols à grains fins à partir des limites d'Atterberg. (1 points)

5) La forme volumineuse caractérise généralement les particules de gravier, de sable et de silt. (01 points)

6) Les essais de compactage en laboratoire peuvent être réalisés dans les deux types de moules, et selon deux modalités, ce qui fait quatre types d'essais :

- L'essai Proctor Normal (0,50 points)
- L'essai Proctor Modifié (0,50 points)
- L'essai C.B.R Normal (0,50 points)
- L'essai C.B.R Modifié (0,50 points)

Solution d'exercice 01 : (06 Pts)

1) Calcul le poids volumique total γ_h et le poids volumique du sol sec γ_d : (02 points)

$$\gamma = \gamma_h = \frac{W}{V} = \frac{773,1 * 9,81}{405} = 18,73 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{697,2 * 9,81}{405} = 16,89 \text{ kN/m}^3$$

2) Calcul la teneur en eau : (01 points)

$$\text{On a : } w = \frac{W_w}{W_s} * 100 \% = \frac{773,1 - 697,2}{697,2} * 100 = 10,87 \%$$

3) Calcul l'indice des vides « e » : (01 points)

On a par définition : $e = \frac{V_v}{V_s}$

On doit chercher V_v et V_s

$$G_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$$

$$\gamma_s = G_s * \gamma_w = 2,65 * 9,81 = 26 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$$

$$V_s = \frac{W_s}{\gamma_s} = \frac{697,2 * 9,81}{26} = 263,05 \text{ cm}^3$$

On calcul le volume des vides V_v

$$V_v = V_t - V_s = 405 - 263,05 = 141,95 \text{ cm}^3$$

On calcul la masse de l'eau M_w

$$M_w = M_t - M_s = 773,1 - 697,2 = 75,9 \text{ g}$$

On calcul le volume d'eau V_w

$$\gamma_w = \frac{W_w}{V_w}$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{75,9 * 9,81}{9,81} = 75,9 \text{ cm}^3$$

On calcul le volume d'air V_a

$$V_a = V_v - V_w = 141,95 - 75,9 = 66,05 \text{ cm}^3$$

$$\text{Donc } e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{141,95}{263,05} = 0,54$$

4) Calcul la porosité « n » : (01 points)

$$n = \frac{e}{1 + e} = \frac{0,54}{1,54} = 0,35$$

5) Calcul le degré de saturation « S_r » : (01 points)

$$S_r = \frac{w * \gamma_s}{e * \gamma_w} = \frac{0,10 * 26}{0,54 * 9,81} = 49,08 \%$$

Solution d'exercice 02 : (06 Pts)

1) La courbe de compactage de ce matériau : (02 points)

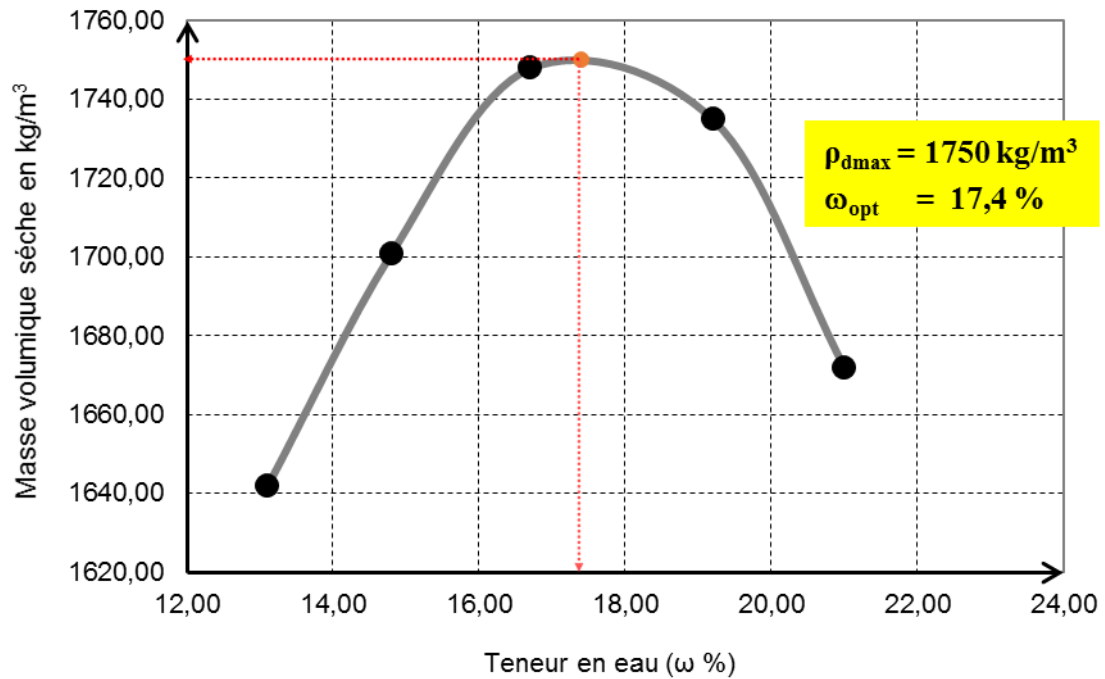
$$\text{La teneur en eau : } w = \frac{m_w}{m_s} * 100 \% = \frac{m_h - m_s}{m_s} * 100$$

$$\text{La masse volumique humide : } \rho_h = \frac{m_h}{V_{moule}}$$

$$\text{La masse volumique sèche : } \rho_d = \frac{\rho_h}{1 + w}$$

Échantillon	Masse du sol humide (g)	Masse du sol sec (g)	La teneur en eau w (%)	La masse volumique humide (kg/m ³)	La masse volumique sèche (kg/m ³)
1	1753,1	1550	13,10	1857,10	1641,95
2	1843,3	1605,7	14,80	1952,65	1700,95
3	1925,7	1650,1	16,70	2039,94	1747,99
4	1952,3	1637,8	19,20	2068,11	1734,96
5	1909,9	1578,4	21,00	2023,20	1672,03

La courbe de compactage du remblai



2) La masse volumique sèche maximale ($\rho_{d-\max}$) et la teneur en eau optimale (ω_{OPT}): (02 points)

Graphiquement on peut lire : $\rho_{d-\max} = 1750 \text{ kg/m}^3$
 $\omega_{\text{OPT}} = 17,4 \%$

3) Le degré de saturation S_r correspondant à l'optimum (02 points)

$$\rho_d = \frac{G_s \rho_w}{1 + \frac{G_s \omega}{S_r}}$$

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$G_s = 2,55$$

$$\rho_{d-\max} = 1750 \text{ kg/m}^3$$

$$\omega_{\text{opt}} = 17,4 \%$$

$$1750 = \frac{2,55 * 1000}{1 + \frac{2,55 * 0,174}{S_r}}$$

Le sol à l'optimum a un degré de saturation : $S_r = 97,08 \%$

Examen Final

Durée : 1 heure 30 minutes

2ème année Licence Génie Civil

Matière : Mécanique des sols

Questions de cours : (08 points)

- 1) Définir le compactage et donner son utilité ?
- 2) Qu'est-ce qu'une courbe de compactage ?
- 3) Citer les différents états de sols, et leurs limites ?
- 4) Quelle est l'utilité du l'abaque de plasticité de Casagrande ?
- 5) Quels sont les types de sols qui présentent habituellement une forme volumineuse ?
- 6) Les essais de compactage en laboratoire peuvent être réalisés dans deux types de moules, et selon deux modalités, ce qui fait quatre types d'essais. Que sont-ils ? sans explication.

Exercice 01 : (06 points)

On prélève 773,1 g d'un sol sablonneux humide. Le volume de l'excavation correspondant au prélèvement de l'échantillon est de 405 cm³. Après séchage, la masse est réduite à 697,2 g. Des essais ont montré que la densité des grains solides est égale à 2,65. On prendra $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Déterminer et calculer les paramètres suivants :

1. Le poids volumique total et le poids volumique du sol sec.
2. La teneur en eau.
3. L'indice des vides.
4. La porosité.
5. Le degré de saturation.

Exercice 02 : (06 points)

Des remblais sont utilisés pour soutenir le viaduc routier de Hammam Boughrara à Maghnia. Ils doivent être relativement forts et incompressible pour la stabilité et pour éviter les tassements différentiels qui pourraient endommager le viaduc ou la chaussée.

Dans ce contexte les résultats d'un essai de compactage Proctor modifié du remblai sont présentés dans le tableau 1. La densité relative des grains solides $G_s = 2,55$. on prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$. Utilisant ces données :

1. Tracer la courbe de compactage de ce matériau.
2. Estimer la masse volumique sèche maximale (ρ_{d-max}) et la teneur en eau optimale (w_{OPT}).
3. Calculer le degré de saturation (S_r) à ρ_{d-max}

Tableau 1. Essai de Proctor modifié (volume du moule $0,944 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$)

Échantillon	Masse du sol humide (g)	Masse du sol sec (g)
1	1753,1	1550,0
2	1843,3	1605,7
3	1925,7	1650,1
4	1952,3	1637,8
5	1909,9	1578,4

Exercice 1 :

① Montrons que l'éq $f(x)=0$ admet une racine unique α dans $[1, 2]$

$\rightarrow f$ est continue sur $[1, 2]$. (0,25)

$- f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0, f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 7 > 0$ (0,25 + 0,15)

$\Rightarrow f(1)f(2) < 0$ (0,25)

$- f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0,57$ (0,15)

x	$-\infty$	$-0,57$	$0,57 + \infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

$f'(x) > 0 \forall x \in [1, 2]$ (0,15)

D'où f est strictement croissante sur $[1, 2]$. (0,15)

D'après le TVI, l'éq $f(x)=0$ admet une racine unique α dans $[1, 2]$. (0,15)

② Montrons que l'éq $f(x)=0 \Leftrightarrow x = g(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ (0,15)

$\Leftrightarrow x^3 = x + 1$ (0,15)

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$ (0,15)

③ Montrons que la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n+1}$ converge vers la racine α .

① $g(x)$ est dérivable sur $[1, 2]$. (0,25)

$- g'(x) = \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3}$ est continue sur $[1, 2]$. (0,15) (0,15)

D'où $g \in C^1([1, 2])$. (0,15)

$|g'(x)| \leq 1$

$$(2) \quad g(1) = \sqrt[3]{1+1} = (2)^{1/3} = 1,25 \in [1, 2]. \quad (0,25)$$

$$-g(2) = \sqrt[3]{2+1} = (3)^{1/3} = 1,44 \in [1, 2]. \quad (0,25)$$

$$-g'(x) = \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3} > 0 \quad \forall x \in [1, 2] \quad (0,25) \quad (1,9,25)$$

Donc si $1 \leq x \leq 2$ alors $1,25 = g(1) \leq g(x) \leq g(2) = 1,44 < 2$

$$\text{Donc } g([1, 2]) \subset [1, 2]. \quad (0,25)$$

$$(3) \quad |g'(x)| = \left| \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3} \right| = \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3} \quad (0,25)$$

$$(|g'(x)|)' = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} (x+1)^{-5/3} = -\frac{2}{9} (x+1)^{-5/3} < 0 \quad \forall x \in [1, 2]. \quad (0,25) \quad (0,25) \quad (0,25)$$

Donc $|g'|$ est strictement décroissante sur $[1, 2]$. $(0,25)$

$$\text{max } |g'(x)| = |g'(1)| = \left| \frac{1}{3} (1+1)^{-2/3} \right| = 0,209 < 1 \quad (0,25)$$

Par conséquent la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n + 1}$

Converge vers la racine α .

4) Calculons une approximation de α à 10^{-2} près en prenant $x_0 = 1,5$

$$\begin{cases} x_0 = 1,5 \\ x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n + 1} \\ |x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon = 10^{-2} \end{cases} \quad (0,25)$$

n	α_n	$ x_{n+1} - \alpha_n \leq \epsilon = 10^{-2}$
0	$\alpha_0 = 1,5$	"
1	$\alpha_1 = 1,3572$	$0,14287\epsilon$ (0,2) (0,1)
2	$\alpha_2 = 1,3308$	$0,02647\epsilon$ (0,2) + (0,1)
3	$\alpha_3 = 1,3258$	$0,005\epsilon$ (0,2) (19,11)

D'où $\alpha \approx \alpha_3 = 1,3258$ (0,25)

Exercice 2:

① Construisons le polynôme d'interpolation de Newton par la méthode des différences divisées:

(0,2) $n+1 = 3 \Rightarrow m=2$ (0,25)

$$P_2(x) = S_0(\alpha_0) + S_1(\alpha_0, \alpha_1)(x - \alpha_0) + S_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)$$
 (0,15)

+ Calculons les différences divisées:

α_i	$S_0(\alpha_i)$	$S_1(\alpha_i, \alpha_{i+1})$	$S_2(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})$
0	2,1		
0,1	2,45	$\frac{2,45 - 2,1}{0,1 - 0} = 3,5$	
0,2	2,9	$\frac{2,9 - 2,45}{0,2 - 0,1} = 4,5$	$\frac{4,5 - 3,5}{0,2 - 0} = 5$

D'où $P_2(x) = 2,1 + 3,5(x - 0) + 5(x - 0)(x - 0,1)$ (0,25)

$$= 2,1 + 3,5x + 5(x^2 - 0,1x)$$

$$= 2,1 + 3,5x + 5x^2 - 0,5x$$

$P_2(x) = 5x^2 + 3x + 2,1$ (0,25)

② Calculons les intégrales suivantes:

$I = \int_0^{0,2} x f(x) dx$ par la méthode des trapèzes:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \quad (0,25)$$

$$n=2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{0,2-0}{2} = 0,1, \quad x_0=0, \quad x_1=0,1, \quad x_2=0,2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{0,2} x f(x) dx &\approx \frac{h}{2} \left[0 \cdot f(0) + 0,2 f(0,2) + 2 \sum_{i=1}^1 f(x_i) \right] \quad (0,25) \\ &\approx \frac{0,1}{2} \left[0 \times 2,1 + 0,2 \times 2,9 + 2 \times 0,1 f(0,1) \right] \quad (0,25) \\ &\approx \frac{0,1}{2} \left[0 + 0,2 \times 2,9 + 2 \times 0,1 \times 2,45 \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{I \approx 0,0535} \quad (0,25)$$

$J = \int_0^{0,2} f(x) dx$ par la méthode de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f(b) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{0,2} f(x) dx &\approx \frac{0,2-0}{6} \left[f(0) + f(0,2) + 4 f(0,1) \right] \quad (0,25) \\ &\approx \frac{0,2}{6} \left[2,1 + 2,9 + 4 \times 2,45 \right] \quad (0,25) \end{aligned}$$

$$\boxed{J \approx 0,49333} \quad (0,25)$$

① Mettre le système sous forme matricielle $AX=b$: (0,25)

$$(S) \Leftrightarrow AX=b \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

② Calculons le déterminant de A:

$$\det(A) = 9 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (0,25)$$

$$= 9(25-1) - 3(15-3) + 3(3-15) \quad (0,25)$$

$$= (9 \times 24) - (3 \times 12) + 3(-12)$$

$$\boxed{\det(A) = 144} \quad (0,25)$$

③

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad (0,25)$$

+ le pivot $a_{11} = 9 \neq 0$ alors:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{matrix} \quad (0,25)$$

$$A^{(1)} \cdot X = b^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 3y + 3z = 9 \\ 4y = -4 \\ 4z = 4 \end{cases} \begin{cases} x = (9-3+3)/9 = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (0,25) \quad \text{D'où } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 01 : considérons l'équation non linéaire suivante :

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

- 1) Montrer que cette équation admet une racine unique réelle α dans $[1, 2]$.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $x = g(x) = \sqrt[3]{x+1}$.
- 3) Montrer que la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{x_n+1}$ converge vers la racine α .
- 4) Calculer une approximation de cette racine α (avec quatre décimales) à 10^{-2} près en prenant $x_0 = 1.5$.

Barème détaillé de l'exercice n°1 : 02.75 pts+01 pts+04.25 pts+02 pts

Exercice 02 : On considère la fonction $f(x)$ définie par le tableau suivant :

x_i	0	0.1	0.2
$f(x_i)$	2.1	2.45	2.9

1. Construire le polynôme d'interpolation de Newton par la méthode des différences divisées.
2. Calculer les intégrales suivantes :
 - 2.1 $I = \int_0^{0.2} xf(x)dx$ par la méthode des trapèzes.
 - 2.2 $J = \int_0^{0.2} f(x)dx$ par la méthode de Simpson.

Barème détaillé de l'exercice n°2 : 03 pts+01.75pts+01 pts

Exercice 03 : Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 9x + 3y + 3z = 9 \\ 3x + 5y + z = -1 \\ 3x + y + 5z = 7 \end{cases} \quad (S)$$

1. Mettre le système (S) sous forme matricielle $AX = b$.
2. Calculer le déterminant de A .
3. Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

Barème détaillé de l'exercice n°3 : 0.25 pts+0.5pts+03.5pts

Responsable de la matière : Dr A Boudermine

Examen de Variable complexe

Exercice 1 : Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation $z^n - 1 = 0$ ($n > 1$). Montrer que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. On étudie séparément les cas $n = 2, n = 3$ puis le cas général.

Exercice 2 : Trouver l'ensemble des points du plan complexe définis simultanément par les conditions $1 \leq |z - 1 + i| \leq 2$ et $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z - 1 + i) < \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3: Trouver la fonction analytique $w = f(z)$ si l'on connaît sa partie réelle $u(x, y) = 2 \sin x \cosh y - x$ et compte tenu de la condition supplémentaire $f(0) = 0$.

Exercice 4: calculer l'intégrale

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz.$$

Bon courage